ны.

Как известно [4], поверхность V_2, лежащая на гиперсф $S_3(O,r)\subset E_4$, несет сопряженную ортогональную сеть Σ_2. Отне поверхность V_2 к сети Σ_2. Тогда $b^\alpha_{ij}=\gamma_{ij}=0$ $(i\neq j)$.

Рассмотрим гиперсферу, радиус которой отличен от 1. Пр положим, что $b^3_{11}\neq b^3_{22}$, $\forall x\in V_2$. Можно показать, что присоеди ненная кривая поверхности V_2 в точке x [2] распадается н две пересекающиеся прямые, которые относительно репера R з даются уравнениями

$$a_i:\ -b^3_{ii}x^3+\frac{1}{r}x^4+1=0.$$

Легко видеть, что прямые a_1 и a_2 пересекаются в точке O(

Рассмотрим точку F, $\vec{OF}=\vec{OH}+\vec{HF}$ на прямой ℓ_x. Так к

$$\vec{OH}=\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\vec{Ox},\quad \vec{HF}=\rho\,\vec{e}_3,$$

то

$$\vec{OF}=\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\vec{Ox}+\rho\,\vec{e}_3.$$

Из формул (I) и $\omega^\beta_\alpha=0$ следует, что

$$d\vec{F}=\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\omega^i\vec{e}_i+d\rho\,\vec{e}_3+\rho\,\omega^i_3\vec{e}_i.$$

Точка F является фокусом семейства прямых ℓ_x тогда и только тогда, когда при некотором смещении точки x по пове хности V_2: $d\vec{F}\parallel\vec{e}_4$, т.е. $\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\omega^i+\rho\,\omega^i_3=0$.

Легко показать, что последнее равенство можно записать виде

$$\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\omega^i-\rho\, b^3_{ij}\omega^j=0$$

или

$$\left(\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\delta^i_j-\rho\, b^3_{ij}\right)\omega^j=0,$$

где $\det\left\|\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\delta^i_j-\rho\, b^3_{ij}\right\|=0$.

Считая, что $b^3_{11}\neq0$, $b^3_{22}\neq0$, из последнего равенства находим значения ρ:

$$\rho_1=\frac{1-\frac{1}{r^2}}{b^3_{11}},\qquad \rho_2=\frac{1-\frac{1}{r^2}}{b^3_{22}},$$

которым соответствуют смещения точки x вдоль линий ω^2 или ω^1 сети Σ_2 соответственно. Заметим, что точки F_1 и F_2, соответствующие абсциссам ρ_1 и ρ_2 на прямой ℓ_x, являются точками пересечения этой прямой с прямыми a_1 и a_2, на которые распа лась присоединенная кривая. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. Пусть поверхность V_2 лежит на гиперсфере $S_3(O,r)\subset E_4$, $r\neq1$. В общем случае точки пересечения пря ℓ_x с присоединенной кривой поверхности V_2 в точке x явля ются фокусами семейства прямых ℓ_x.

Библиографический список

1. С и л а е в Е.В. Геометрия поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве // Геометрия погруженных многообразий: Сб. научн. тр. М., 1983. С.99-104.

2. Б а з ы л е в В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий. М., 1989. 222 с.

3. Yano K. Submanifolds with parallel mean Curvature vector of a euclidean space or a sphere // Kōdai Mathematical seminar reports. 1971. V. 23. №1. p. 144-159.

4. С и л а е в Е.В. О скалярной кривизне поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. научн. тр. / Калинингр. ун-т, Калининград, 1982. Вып.13. С.87-90.

УДК 514.7

О ДВОЙНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ ПАРЫ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Г.М.С и л а е в а

(Московский государственный педагогический университет)

Рассмотрим гиперповерхности V_{n-1}, $\overline{V}_{n-1}$ в n-мерном евклидовом пространстве E_n и диффеоморфизм $f: V_{n-1}\to\overline{V}_{n-1}$. Предположим, что $y=f(x)\neq x$, $\forall x\in V_{n-1}$, причем конгруэнция прямых xy является ортогональной относительно V_{n-1}. Присоединим к каждой точке x поверхности V_{n-1} подвижной репер $R^x=(x,\vec{e}_i,\vec{e}_n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ $(i,j=1,\dots,n-1)$ принадлежали касательному пространству поверхности V_{n-1} в точке x, а вектор $\vec{e}_n$ направим вдоль вектора $\vec{xy}$. Деривационные формулы репера R^x имеют вид:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega^j_i\vec{e}_j+\omega^n_i\vec{e}_n,\quad d\vec{e}_n=\omega^i_n\vec{e}_i+\omega^n_n\vec{e}_n. \tag{1}$$

При смещении точки x по поверхности V_{n-1} имеем: $\omega^n=0$. Дифференцируя это равенство внешним образом и применяя лемму Картана, получим:

$$\omega^n_i=b^n_{ij}\,\omega^j,\quad b^n_{ij}=b^n_{ji}. \tag{2}$$

Можно показать [1], что к каждой точке y присоединен репер $R^y=(y,\vec{e}'_i,\vec{e}_n)$, где $\vec{e}'_i=A^k_i\vec{e}_k+B_i\vec{e}_n$ (3)

(выражения для A_i^k, B_i известны).

Напомним, что линия $\gamma \subset V_{n-1}$ называется двойной линией отображения f, если касательные к этой линии и ее образу, взятые в соответствующих точках x и $f(x)$, пересекаются или параллельны. Направление $\{e^i\}$ двойной линии удовлетворяет системе уравнений [1]:

$$(t_i^j - m\delta_i^j)e^i = 0, \tag{4}$$

где

$$\det \| t_i^j - m\delta_i^j \| = 0, \quad \omega_n^j = t_i^j \omega^i,$$

$\| t_i^j \|$ – матрица аффинора T.

Т е о р е м а 1. Неасимптотическая линия $\gamma \subset V_{n-1}$ является геодезической на гиперповерхности V_{n-1} и двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда в любой точке $x \in \gamma$ соприкасающаяся плоскость этой линии совпадает с соприкасающейся плоскостью линии $f(\gamma)$ в точке $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Направим вектор $\vec{e}_1$ репера R^x по касательной к линии γ. Пусть в любой точке x неасимптотической линии γ соприкасающаяся плоскость $[x, \vec{e}_1, d\vec{e}_1]$ этой линии совпадает с соприкасающейся плоскостью $[y, \vec{e}_1', d\vec{e}_1']$ линии $f(\gamma)$. Это означает, что $\vec{e}_1', d\vec{e}_1', \vec{e}_n \parallel [x, \vec{e}_1, d\vec{e}_1]$. Так как $\vec{e}_1', \vec{e}_n \parallel [x, \vec{e}_1, d\vec{e}_1]$, то векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_1', \vec{e}_n$ компланарны, т.е. линия γ является двойной линией отображения f. Тогда в силу формул (4) имеем $A_1^{i_1} = 0$ $(i_1 = 2, \dots, n-1)$. Из сказанного получим:

$$\vec{e}_1' = p\vec{e}_1 + q\,d\vec{e}_1, \tag{5.а}$$

$$d\vec{e}_1' = r\vec{e}_1 + s\,d\vec{e}_1, \tag{5.б}$$

$$\vec{e}_n = t\vec{e}_1 + u\,d\vec{e}_1. \tag{5.в}$$

Равенство (5.в) означает, что соприкасающаяся плоскость линии γ проходит через прямую xy, т.е. линия γ является геодезической на V_{n-1}. Из (5.а), (3) следует, что

$$A_1^i \vec{e}_i + B_1 \vec{e}_n = p\vec{e}_1 + q(\omega_1^i \vec{e}_i + \omega_1^n \vec{e}_n),$$

т.е.

$$A_1^1 = p + q\omega_1^1, \quad A_1^{i_1} - q\omega_1^{i_1} = 0, \quad B_1 = q\omega_1^n.$$

Так как $\omega_1^n \neq 0$ ($b_n^n \neq 0$ в силу того, что γ – неасимптотическая линия на V_{n-1}), то из последнего уравнения этой системы однозначно определяется q. Тогда из первого уравнения системы найдется p. В силу условия $\omega_1^{i_1} = 0$ (линия γ – геодезическая на V_{n-1}) и формулы $A_1^{i_1} = 0$, равенства $A_1^{i_1} - q\omega_1^{i_1} = 0$ в полученной системе уравнений представляют собой тождества. Из формул (I), (3), (5.б) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} dA_1^1 + A_1^1\omega_1^1 + B_1\omega_n^1 = r + s\omega_1^1, \\ B_1 \omega_n^{i_1} = 0, \\ A_1^1\omega_1^n + dB_1 + B_1\omega_n^n = s\omega_1^n. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы однозначно находим s (т.к. $\omega_1^n \neq 0$). Тогда из первого уравнения системы однозначно определится r. Равенства $B_1\omega_n^{i_1} = 0$ полученной системы представляют собой тождества, т.к. с учетом формул, записанных для ω_n^j и $A_1^{i_1}$ при смещении вдоль линии γ, получим, что $\omega_n^{i_1} = 0$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Если в любой точке x неасимптотической линии γ соприкасающаяся плоскость этой линии совпадает с соприкасающейся плоскостью линии $f(\gamma)$ в точке $f(x)$, то γ и $f(\gamma)$ – плоские линии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем необходимые и достаточные условия того, что линии γ и $f(\gamma)$ являются плоскими линиями и покажем, что эти условия выполняются в случае, когда имеет место условие, указанное в теореме.

Пусть, как и раньше, вектор $\vec{e}_1$ репера R^x направлен по касательной к линии γ. Линия γ является плоской тогда и только тогда, когда она лежит в своей соприкасающейся плоскости, т.е.

$$d^2\vec{e}_1 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\,d\vec{e}_1, \tag{6}$$

или, в силу (1), тогда и только тогда, когда:

$$d\omega_1^1 + \omega_1^i\omega_i^1 + \omega_1^n\omega_n^1 = \alpha + \beta\omega_1^1,$$

$$d\omega_1^{i_1} + \omega_1^j\omega_j^{i_1} + \omega_1^n\omega_n^{i_1} = \beta\omega_1^{i_1},$$

$$d\omega_1^n + \omega_1^i\omega_i^n + \omega_1^n\omega_n^n = \beta\omega_1^n.$$

Из последнего уравнения этой системы однозначно определяется β (т.к. $\omega_1^n \neq 0$), и, значит, из первого уравнения однозначно определяется α. В силу теоремы 1 линия γ является геодезической, т.е. $\omega_1^{i_1} = 0$. Тогда второе равенство полученной системы равносильно равенству $\omega_1^n\omega_n^{i_1} = 0$, которое выполняется всегда в силу того, что $\omega_n^{i_1} = 0$. Итак, такие α и β, которые удовлетворяют равенству (6), существуют всегда. Следовательно, линия γ – плоская линия.

Проверим теперь, что найдутся такие u и v, что

$$d^2\vec{e}_1' = u\vec{e}_1 + v\,d\vec{e}_1.$$

В силу равенств $\omega_1^{i_1} = 0$, $\omega_n^{i_1} = 0$, $A_1^{i_1} = 0$ и формулы (1) полученное равенство равносильно системе уравнений:

$$d^2A_1^1 + 2dA_1^1\omega_1^1 + A_1^1[d\omega^1 + (\omega_1^1)^2 + \omega_1^n\omega_n^1] + 2B_1\omega_n^1 + B_1(d\omega_n^1 + \omega_n^1\omega_1^1 + \omega_n^n\omega_n^1) = u + v\omega_1^1,$$

$$2dA_1^1\omega_1^n + A_1^1(d\omega_1^n + \omega_1^1\omega_1^n + \omega_1^n\omega_n^n) + d^2B_1 + 2dB_1\omega_n^n + B_1\,[d\omega_n^n + \omega_n^1\omega_1^n + (\omega_n^n)^2] = v\omega_1^n.$$

Из второго уравнения системы однозначно определяется v , а из первого уравнения u . Итак, u и v , удовлетворяющие указанному требованию, действительно существуют. Это означает, что линия $\ell(\gamma)$ лежит в своей соприкасающейся плоскости, то есть является плоской линией. Теорема доказана.

Библиографический список

1. С и л а е в а Г.М. О сети двойных линий пары гиперповерхностей в евклидовом пространстве / МГПИ им.В.И.Ленина. М., 1987. 9с. Библиогр. 4 назв. Деп. в ВИНИТИ 08.07.87. №5399-В87.

2. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. научн. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып.6. С.19-25.

УДК 514.76

О ПОГРУЖЕНИИ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ $P_{m,m+1}$ БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

С.И.С о к о л о в с к а я

(Московский государственный университет)

В настоящей работе рассматриваются проективные связности P_{mn} , т.е. проективные связности, определенные на распределении m-мерных линейных элементов, касательных к n-мерному многообразию $(m<n)$. Показана возможность реализации таких связностей на специальным образом оснащенных поверхностях проективного пространства. Поставлена задача погружения связности P_{mn} в N-мерное проективное пространство. Доказано, что при $n=m+1$ такое погружение возможно, если $N > \frac{m^2}{2} + \frac{5m}{2}$. Указано на возможность получения более точной оценки: $N > \frac{m^2}{2} + 2m$.

1. Рассмотрим главное расслоенное пространство проективной структуры $H(M_n, PD_n^1)$ с n-мерной базой и n-мерными слоями, касательными к базовому многообразию. Структурные уравнения этого расслоения [1] :

$$\begin{cases} d\theta_0^{\bar i} = \theta_0^{\bar k}\wedge\theta_{\bar k}^{\bar i}, \quad d\theta_j^{\bar i} = \theta_j^{\bar k}\wedge\theta_{\bar k}^{\bar i} + \theta_0^{k}\wedge\theta_{jk}^{\bar i}, \\ \theta_{\bar i}^{\bar i} = 0, \quad \theta_{jk}^{k} = 0, \quad i,j,k = 1,\dots,n; \quad \bar i,\bar j,\bar k = 0,1,\dots,n \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим заданное на нашем расслоении распределение Δ , состоящее из m-мерных площадок, расположенных в касательных пространствах многообразия M_n . Уравнения такого распределения Δ :

$$\theta_\xi^u = \Lambda_{\xi j}^u\theta_0^j, \quad u = m+1,\dots,n; \quad \xi,\eta,\zeta = 1,\dots,m.$$

В силу этих уравнений из (1) получим:

$$\begin{cases} d\theta_0^u = \theta_0^{\bar v}\wedge\theta_{\bar v}^u + \Lambda_{\xi i}^u\,\theta_0^{\xi}\wedge\theta_0^i, \quad d\theta_0^{\bar\xi} = \theta_0^{\bar\kappa}\wedge\theta_{\bar\kappa}^{\bar\xi}, \\ \bar v = 0, m+1,\dots,n; \quad \bar\xi, \bar\xi = 0,1,\dots,m; \\ d\theta_\eta^{\bar\xi} = \theta_\eta^{\bar\zeta}\wedge\theta_{\bar\zeta}^{\bar\xi} + \theta_0^{\kappa}\wedge(\Lambda_{\eta\kappa}^u\theta_u^{\bar\xi} + \theta_{\eta\kappa}^{\bar\xi}). \end{cases} \qquad (2)$$

Это структурные уравнения главного расслоенного пространства проективной структуры, базой которого является n-мерное многообразие, а слоями - m-мерные плоскости, принадлежащие распределению Δ . При этом формы θ_0^{ξ} одновременно входят как в состав главных, так и в состав структурных форм.

Связность на этом расслоении определяется заданием объекта связности с компонентами $\Pi_{\bar\eta j}^{\bar\xi}$, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} d\Pi_{0\eta}^{\bar\xi} + \Pi_{0\eta}^{\bar\zeta}\theta_{\bar\zeta}^{\bar\xi} - \Pi_{0\zeta}^{\bar\xi}\theta_\eta^{\zeta} = \Pi_{0\eta\ell}^{\bar\xi}\theta_0^\ell, \quad \ell = 1,\dots,n, \\ d\Pi_{0u}^{\bar\xi} + \Pi_{0u}^{\bar\zeta}\theta_{\bar\zeta}^{\bar\xi} - \Pi_{0\zeta}^{\bar\xi}\theta_u^{\zeta} - \Pi_{0v}^{\bar\xi}\theta_u^{v} - \theta_u^{\bar\xi} = \Pi_{0u\ell}^{\bar\xi}\theta_0^\ell, \\ d\Pi_{\eta i}^{\bar\xi} - \Pi_{\zeta i}^{\bar\xi}\theta_\eta^{\zeta} + \Pi_{\eta i}^{\bar\zeta}\theta_{\bar\zeta}^{\bar\xi} - \Lambda_{\eta i}^{v}\theta_v^{\bar\xi} - \theta_{\eta i}^{\bar\xi} + \Pi_{\eta i}^{\bar\xi}\theta_0^0 - \Pi_{\eta\zeta}^{\bar\xi}\theta_i^{\zeta} - \delta_i^u\Pi_{\eta v}^{\bar\xi}\theta_u^{v} = \Pi_{\eta i\ell}^{\bar\xi}\theta_0^\ell, \end{cases} \qquad (3)$$

из рассмотрения которых делаем вывод, что объекты $(\Pi_{0\eta}^{\xi}), (\Pi_{0\eta}^{\bar\xi})$ являются тензорами, т.е. обращение их в ноль носит инвариантный характер. Мы ограничимся рассмотрением только тех связностей, для которых эти тензоры нулевые. Компоненты $\Pi_{0u}^{\bar\xi}$ обратим в ноль за счет дополнительной специализации в выборе репера. Тогда из уравнений (3) получим: $\Pi_{0\eta\ell}^{\bar\xi} = 0$, $\theta_u^{\bar\xi} = -\Pi_{0u\ell}^{\bar\xi}\theta_0^\ell$.

12 Зак. 1399